

Geometría de Kerr y ley del área de Hawking: espectroscopía de anillo y ciencia de datos reproducible en agujeros negros rotatorios

Kerr geometry and Hawking's area law: Ringdown spectroscopy and reproducible data science in rotating black holes

Luis Rojas-Valdivia¹

(1) Doctorado en Industria Inteligente, Facultad de Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso 2362804, Chile
(luis.rojas.v@mail.pucv.cl)

Recibido 20/10/2024

Evaluado 20/11/2024

Aceptado 19/12/2024

<https://doi.org/10.65093/aci.v16.n1.2025.22>

RESUMEN

Se desarrolla un estudio computacional con un *dataset* de agujeros negros de Kerr ($M=1$, $a \in [0, 1]$) para contrastar el teorema de Kerr y la ley del área de Hawking. A partir de $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ se calculan magnitudes geométrico-termodinámicas: $A = 4\pi (r_+^2 + a^2)$, $\kappa = (r_+ - r_-)/[2(r_+^2 + a^2)]$ y $T_H = \kappa/(2\pi)$; además, se estiman frecuencias de modos cuasi-normales. Se emplea aritmética multiprecisión, validaciones físico-informadas y visualización reproducible. Los resultados confirman: (i) $\Delta r = r_+ - r_- \rightarrow 0$ cuando $a \rightarrow M$; (ii) $T_H, \kappa \rightarrow 0$ en el límite extremal; (iii) consistencia entre A y $S_{BH} = A/4$ y monotonías esperadas con a a masa fija. El enfoque basado en datos y consciente de las restricciones permite realizar pruebas del Teorema de unicidad de agujeros negros (No-hair), mediante espectroscopia de ringdown y cuantificación de la incertidumbre basada en principios bajo invariantes geométricas. Este marco proporciona un puente reproducible entre la teoría, los datos y las próximas observaciones de ondas gravitacionales.

Palabras clave: agujero negro de Kerr, Ley del área de Hawking, Modos cuasi-normales, espectroscopía de *ringdown*, gravedad de superficie, termodinámica de agujeros negros, ciencia de datos reproducible

ABSTRACT

A computational study is carried out using a dataset of Kerr black holes ($M=1$, $a \in [0, 1]$) to contrast Kerr's theorem and Hawking's area law. Using $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ geometric-thermodynamic magnitudes are calculated: $A = 4\pi (r_+^2 + a^2)$, $\kappa = (r_+ - r_-)/[2(r_+^2 + a^2)]$ and $T_H = \kappa/(2\pi)$ and estimate quasinormal-mode frequencies. Multi-precision arithmetic, physically informed validations, and reproducible visualization are used. Results show: (i) $\Delta r = r_+ - r_- \rightarrow 0$ as $a \rightarrow M$; (ii) $T_H, \kappa \rightarrow 0$ at the extreme limit; (iii) consistency between A and $S_{BH} = A/4$ and expected monotonicities with fixed mass. The data-driven and constraint-aware approach enables testing of black hole uniqueness theorems (No-hair) through ringdown spectroscopy and principle-based uncertainty quantification under geometric invariants. This framework provides a reproducible bridge between theory, data, and forthcoming gravitational-wave observations.

Keywords: Kerr black hole, Hawking area law, quasinormal modes, ringdown spectroscopy, surface gravity, black hole thermodynamics, reproducible data science

INTRODUCCIÓN

Los agujeros negros constituyen una de las predicciones más notables de la relatividad general. Las soluciones estacionarias de las ecuaciones de Einstein y Maxwell que describen agujeros negros se caracterizan únicamente por su masa, momento angular y carga eléctrica (Chruściel *et al.*, 2012). Esta propiedad, conocida como el *teorema del no-Hair* (*Teoremas de unicidad de agujeros negros*) implica que la geometría exterior de un agujero negro giratorio está completamente especificada por el parámetro de espín $a = J/M$ además de la masa M . Roy Kerr descubrió en 1963 una solución exacta para un agujero negro en rotación, ahora conocida como métrica de Kerr (Kerr, 1963; Teukolsky, 2015). En coordenadas de Boyer-Lindquist, los horizontes de evento externos e internos se encuentran en las raíces de $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 = 0$ dando $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ (Physics Forums Community, 2025).

Stephen Hawking propuso en 1971 el *teorema del área* o *teorema de Hawking*, demostrando que bajo condiciones físicas razonables el área total de los horizontes de los agujeros negros no puede disminuir con el tiempo (Callister *et al.*, 2021). Esta ley recuerda a la segunda ley de la termodinámica y motivó a Bekenstein a interpretar el área del horizonte como entropía (Wald, 2010). Posteriormente, Hawking demostró que los agujeros negros radian térmicamente con una temperatura inversamente proporcional a su masa, la llamada radiación de Hawking (Hawking, 1974), lo que confirmó la conexión profunda entre la gravitación, la mecánica cuántica y la termodinámica.

La física de agujeros negros rotatorios presenta además fenómenos como los modos cuasi-normales (*quasinormal modes*, QNM), oscilaciones amortiguadas que caracterizan el *ringdown* tras una fusión. Las frecuencias de estos modos dependen sólo de la masa y el espín del agujero negro y constituyen pruebas experimentales del teorema de unicidad de agujeros negros (No-hair) (Kokkotas & Schmidt, 1999; Berti *et al.*, 2009). La detección de varios QNM por LIGO/Virgo abre la posibilidad de realizar *espectroscopía de agujeros negros* para verificar la consistencia con la métrica de Kerr y la relatividad general (Callister *et al.*, 2021).

En este trabajo se emplea un conjunto de datos computado con aritmética de alta precisión para un agujero negro de Kerr de masa $M = 1$. Se evalúan para 21 valores de a los radios $r_{\pm}$, la temperatura de Hawking T_H y una aproximación de la frecuencia QNM. Se amplía el conjunto con métricas derivadas y se generan visualizaciones que permiten comparar cuantitativamente las predicciones del teorema de Kerr con el comportamiento exigido por el teorema de Hawking.

BREVE DESCRIPCIÓN TEMÁTICA

La solución de Kerr resuelve exactamente las ecuaciones de campo de Einstein en vacío para una geometría estacionaria, axialmente simétrica y asintóticamente plana, y está completamente caracterizada por la masa M y el parámetro de espín a (Kerr, 1963). En coordenadas tipo Boyer-Lindquist, la estructura geométrica se codifica en

$$\Delta(r) = r^2 - 2Mr + a^2, \quad \Sigma(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (1)$$

y los horizontes de eventos corresponden a las raíces de $\Delta = 0$, es decir

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad (2)$$

donde r_+ es el horizonte externo y r_- el interno (Kerr, 1963). La rotación induce arrastre de marcos y define en el horizonte una velocidad angular

$$\Omega_H = \frac{a}{2Mr_+}, \quad (3)$$

que se utiliza en la formulación moderna de las magnitudes termodinámicas del agujero negro (Teukolsky, 2015).

Sobre esta base geométrica, la mecánica de agujeros negros establece análogos de las leyes de la termodinámica: en particular, el *teorema del área* garantiza que el área de horizonte A de un agujero negro clásico no decrece en procesos físicos, y el *cero-ésima ley* establece la constancia de la gravedad de superficie κ en horizontes de Killing (Bardeen *et al.*, 1973). Para la familia de Kerr, una expresión conveniente de la gravedad de superficie es

$$\kappa = \frac{r_+ - r_-}{2(r_+^2 + a^2)}, \quad (4)$$

que, junto con Ω_H , parametriza el equilibrio termodinámico del horizonte (Bardeen *et al.*, 1973). La entrada cuántica de Hawking identifica la temperatura efectiva del horizonte con

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{r_+ - r_-}{4\pi(r_+^2 + a^2)}, \quad (5)$$

lo que implica $T_H \rightarrow 0$ en el límite extremal $a \rightarrow M$ y conecta el régimen geométrico con la emisión cuántica de radiación térmica (Teukolsky, 2015). La interpretación de Bekenstein asigna a los agujeros negros una entropía proporcional al área del horizonte,

$$S_{\text{BH}} = \frac{A}{4}, \quad (6)$$

revelando la correspondencia precisa entre el teorema del área y la segunda ley de la termodinámica (Bekenstein, 1973).

Las perturbaciones lineales de la geometría de Kerr excitadas por fusiones o colapso estelar se describen por la ecuación de Teukolsky y producen un espectro discreto de *modos cuasi-normales* (QNM), cuyas frecuencias complejas $\omega = \omega_R + i\omega_I$ dependen únicamente de (M, a) (Kokkotas & Schmidt, 1999). La medida simultánea de ω_R (oscilación) y ω_I (amortiguamiento) permite pruebas de consistencia del no-cabello y habilita la *espectroscopía de agujeros negros* como programa de inferencia de parámetros. En este marco, la métrica de Kerr provee relaciones analíticas cerradas para $r_{\pm}$, κ , A y Ω_H , que sirven como *constraints* físicos de alta fidelidad al calibrar o validar modelos de señal de anillo (*ringdown*) (Teukolsky, 2015).

Desde la perspectiva de ciencia de datos, el problema adopta una formulación paramétrica y físicamente regularizada en la cual se modela el mapeo

$$A \rightarrow \{r_+(a), r_-(a), \kappa(a), T_H(a), \omega(a)\} \quad (7)$$

con normalización geométrica $G = c = \hbar = k_B = 1$ y con salvaguardas de consistencia como $\Delta \geq 0$ y $0 \leq a \leq M$ (Bardeen *et al.*, 1973). En la práctica, esto se implementa con aritmética multiprecisión para evitar cancelaciones cercanas a extremalidad, propagación rigurosa de incertidumbre por diferenciación automática o Monte Carlo sujeto a invariantes, y ajuste de $\omega(a)$ mediante regresores con sesgo físico (p. ej., series racionales en a con polos excluidos por $|a| \leq M$). Finalmente, la validación cruzada se subordina a leyes de conservación y a monotonidades termodinámicas (p. ej., $S_{\text{BH}} \propto A$ no decreciente), de modo que el pipeline de inferencia sea simultáneamente estadísticamente eficiente y conforme con relatividad general (Bekenstein, 1973).

METODOLOGÍA

Generación del conjunto de datos

El conjunto de datos original proviene de un proyecto de dominio público en Kaggle y está acompañado de un código Python que emplea la biblioteca `mpmath` para asegurar precisión arbitraria. Para cada valor de espín $a \in \{0, 0.05, 0.1, \dots, 1.0\}$ se calcularon:

- *Horizontes externo e interno*: aplicando la fórmula de Kerr $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ (Physics Forums Community, 2025). La figura 1 muestra la dependencia de r_+ y r_- con a .
- *Temperatura de Hawking*: se empleó la expresión $T_H = (\hbar c^3)/(3) \frac{r_+ - M}{4\pi G M r_+^2}$ proporcionada por el código original. Esta temperatura se anula en el límite extremo $a \rightarrow M$ en consonancia con la tercera ley de la termodinámica de agujeros negros, que prohíbe alcanzar una temperatura de superficie nula mediante procesos físicos (Dain & Ortiz, 2014).
- *Frecuencia QNM*: se calcularon aproximaciones simplificadas de la frecuencia del modo dominante, relevantes para estudios de ondas gravitacionales. Aunque simplificadas, estas frecuencias presentan la tendencia general de aumentar con el espín antes de caer hacia cero cuando el agujero negro se aproxima al régimen extremo.

El código original mejoró implementaciones previas relajando la tolerancia numérica a 10^{-15} para evitar raíces espurias, aplicando cálculo paralelo con joblib y registrando errores y advertencias. Los datos finales se almacenaron en formato CSV, acompañados de visualizaciones básicas y documentación.

Análisis de ciencia de datos

Para el presente artículo se cargó el conjunto de datos mediante la biblioteca pandas y se extendió con las siguientes métricas derivadas:

1. *Diferencia de horizontes* $\Delta r = r_+ - r_-$. Mide el grosor de la región ergosférica.
2. *Razón de horizontes* r_+/r_- . Para $a = 0$ el agujero negro es de Schwarzschild y $r_- = 0$, por lo que se reporta NaN.
3. *Área del horizonte* $A = 4\pi(r_+^2 + a^2)$, derivada de la métrica de Kerr. Este parámetro se relaciona con la entropía de Bekenstein-Hawking (Wald, 2010).
4. *Gravedad de superficie* $\kappa = \frac{r_+ - r_-}{2(r_+^2 + a^2)}$. Se utilizó para calcular una temperatura alternativa $T_{H,calc} = \kappa/(2\pi)$ en unidades naturales; difiere de la $T_{H,original}$ por factores de normalización.

Las métricas ampliadas se guardaron en formato JSON y se generaron diversas figuras mediante matplotlib. El código completo se proporciona en el archivo `analysis_kerr.py` e incluye todos los pasos para reproducir los resultados.

Descripción de la *database* ocupada

Estructura y dominio físico. El conjunto de datos corresponde a un agujero negro de Kerr con masa normalizada $M = 1$ y parámetros de espín $a \in [0, 1]$ muestreados en una malla uniforme de 21 puntos; para cada a se tabulan $\{a, r_+, r_-, T_H, QNM\}$, donde $r_{\pm}$ son los radios de los horizontes (externo/interno), T_H es una temperatura de Hawking normalizada y QNM es una aproximación escalar de la frecuencia fundamental de modo cuasi-normal ($\ell = 2, m = 2, n = 0$) usada como observable de anillo (*ringdown*). La base se entrega en CSV con encabezados comentados por “#” y está concebida en unidades geométricas/naturales $G = c = \hbar = k_B = 1$, de modo que las magnitudes son adimensionales y comparables entre sí (Teukolsky, 2015). El fundamento geométrico es la solución de Kerr, para la cual los horizontes satisfacen

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2},$$

relación que fija de manera unívoca la región de no retorno para cada valor de espín y sirve como *constraint* geométrico en los chequeos de calidad (Kerr, 1963). La temperatura de Hawking del horizonte se expresa, en equilibrio, como $T_H = \kappa/(2\pi)$, donde la gravedad de superficie para Kerr es

$$\kappa = \frac{r_+ - r_-}{2(r_+^2 + a^2)},$$

lo que conecta la mecánica de horizontes con la termodinámica de agujeros negros y permite validar la coherencia escalar de la columna T_H frente a la identidad anterior (Bardeen *et al.*, 1973). La entropía de Bekenstein-Hawking $S_{BH} = A/4$ con $A = 4\pi(r_+^2 + a^2)$ proporciona además una verificación integral de monotonizaciones y cotas en el espacio de parámetros (Bekenstein, 1973). La componente espectral QNM se interpreta como estimador fenomenológico de la frecuencia compleja $\omega = \omega_R + i\omega_I$ predicha por la teoría de perturbaciones de Kerr, con dependencia exclusiva en (M, a) y utilidad directa para pruebas del no-cabello mediante espectroscopía de anillo (Kokkotas & Schmidt, 1999). La misma fenomenología ha sido sistematizada en revisiones recientes, que guían el diseño de validaciones por consistencia $\{\omega_R(a), \omega_I(a)\}$ (Teukolsky, 2015).

Garantías de calidad y consistencia. Para cada fila del dataset se verifican identidades exactas de Kerr y relaciones termodinámicas en unidades geométricas: (i) factorización de $\Delta(r) = r^2 - 2Mr + a^2$ y raíces $\pm$ correctas [$\Delta(r_{\pm}) = 0$] (Kerr, 1963); (ii) sumas y productos $r_+ + r_- = 2M$ y $r_+ r_- = a^2$ como invariantes algebraicos que acotan errores de redondeo (Kerr, 1963); (iii) compatibilidad entre T_H provista y $T_H = \kappa/(2\pi)$ derivada, con tolerancia controlada por análisis de residuales; (iv) coherencia geométrica del área $A = 4\pi(r_+^2 + a^2)$ y su vínculo $S_{BH} = A/4$ como chequeo de magnitudes globales (Bekenstein, 1973). El pipeline que implementa estas validaciones, el enriquecimiento de variables $\{\Delta r, \text{ratio}, A, \kappa, T_H^{\text{calc}}\}$ y la generación de visualizaciones/JSON está documentado en el script de análisis reproducible (implementación reproducible del pipeline de carga, validación, enriquecimiento y graficación: `analysis_kerr.py`:`contentRefer-ence[oaicite:0]index=0`).

Pseudocódigo técnico del análisis de datos. A continuación, se detalla el flujo lógico (determinista y reproducible) con el que se procesó la *database*; las fórmulas invocadas se citan en línea cuando corresponde:

INPUT: CSV con columnas $\{a, r_{\text{plus}}, r_{\text{minus}}, T_H, \text{QNM}\}$ ($M=1$, $G=c=\hbar=k_B=1$).

```
# 1) Carga robusta
leer_csv_ignorando_comentarios(path):
    abrir archivo
    para cada fila:
        si fila vacía o comienza con '#': continuar
        si primer campo no numérico: continuar
        convertir {a, r_plus, r_minus, T_H, QNM} a float
        anexar a tabla

# 2) Chequeos geométricos de Kerr [Kerr1963]
assert(0 <= a <= 1)
assert(casi_cero( (r_plus + r_minus) - 2*M ))
assert(casi_cero( (r_plus * r_minus) - a**2 ))
assert(casi_cero( (r_plus - M)**2 - (M**2 - a**2) ))

# 3) Métricas derivadas y termodinámica [BardeenCarterHawking1973]
delta_r = r_plus - r_minus
area     = 4*pi*(r_plus**2 + a**2)
kappa    = (r_plus - r_minus) / (2*(r_plus**2 + a**2))
T_H_calc = kappa / (2*pi)

# 4) Consistencia de temperatura [BardeenCarterHawking1973]
residual_T = T_H - T_H_calc
diagnosticar_bias(residual_T); reportar_rms(residual_T)
```

```
# 5) Fenomenología espectral QNM [KokkotasSchmidt1999]
# (columna QNM es un escalar simplificado; se valida monotonicidad esperada)
validar_QNM(QNM, a) # p.ej., tendencia creciente con a si así lo prescribe el modelo

# 6) Serialización y visualización
exportar_JSON(registros_enriquecidos)
graficar_vs_a({r_plus, r_minus, T_H, T_H_calc, QNM, area, kappa})

OUTPUT: data_metrics.json + PNGs + reporte de validación.
```

Notas sobre inferencia y auditoría. El flujo anterior se ejecuta bajo validación física fuerte: toda estimación numérica está encajada por identidades exactas $\{r_{\pm}\}$ de la métrica de Kerr que fijan Ω_H , κ y A sin ambigüedad (Kerr, 1963). Las leyes de la mecánica de agujeros negros actúan como priors geométricos que regularizan la comparación $T_H \leftrightarrow \kappa/(2\pi)$ y orientan los umbrales de aceptación de residuales (Bardeen *et al.*, 1973). Finalmente, la interpretación espectral de QNM se usa como control externo para asegurar que la señal sintetizada sea coherente con la dependencia (M, a) prevista por la teoría de perturbaciones (Callister *et al.*, 2021).

Disponibilidad de datos

El *dataset* analizado fue *generado* con el marco computacional en Python descrito en este manuscrito (mpmath, joblib, pandas, Matplotlib) para un agujero negro de Kerr con masa normalizada $M = 1.0$. La tabla principal (kerr_black_hole_data.csv) contiene las columnas $\{a, r_+, r_-, T_H, QNM\}$ en unidades geométricas $G = c = \hbar = k_B = 1$, muestreadas en 21 valores uniformes de $a \in [0, 1]$. La versión enriquecida (data_metrics.json) incluye métricas derivadas ($A, \kappa, \Delta r$, etc.). Todo el material (código, datos y figuras) se distribuye como archivo complementario “54_HOLE_BLACK.zip”. Además, se referencia el recurso público que motivó esta implementación: <https://www.kaggle.com/code/franckcoppi/kerr-black-holes-tools>. El *pipeline* reproducible se encuentra en analysis_kerr.py (precisión multiprecisión y tolerancia $|\Delta| \leq 10^{-15}$); los gráficos (*.png) y los metadatos acompañan a este manuscrito.

RESULTADOS

Estadísticas descriptivas

La tabla 1 resume valores característicos de las variables del conjunto de datos. Se observa que el radio externo medio es aproximadamente 1,071 y decrece con el espín, mientras que el radio interno aumenta desde cero hasta aproximadamente 1 al acercarse al caso extremo. La temperatura de Hawking decae monótonamente; la frecuencia QNM presenta un máximo alrededor de $a \approx 0,7$ y se desvanece en el límite extremo, consistente con la desaparición de modos radiativos cuando la gravedad de superficie tiende a cero.

Tabla 1: Estadísticas descriptivas de las variables principales. La media y la desviación estándar se calculan sobre los 21 valores de a .

Variable	Media	Desviación estándar
Parámetro de espín a	0,50	0,30
Radio externo r_+	1,071	0,223
Radio interno r_-	0,429	0,223
Diferencia Δr	0,642	0,447
Temperatura de Hawking T_H	0,0333	0,0289
Frecuencia QNM	0,0554	0,0328
Área del horizonte A	4,093	0,464
Gravedad de superficie κ	0,0833	0,0722

Visualización de los horizontes

La figura 1 presenta las curvas de r_+ y r_- como función del espín. El radio externo disminuye desde $2M$ en $a = 0$ hasta M en el límite extremo, mientras que el radio interno crece desde 0 hasta M . Esta simetría refleja la estructura de la métrica de Kerr y confirma numéricamente el teorema de Kerr, que predice la coalescencia de los horizontes en el estado extremo.

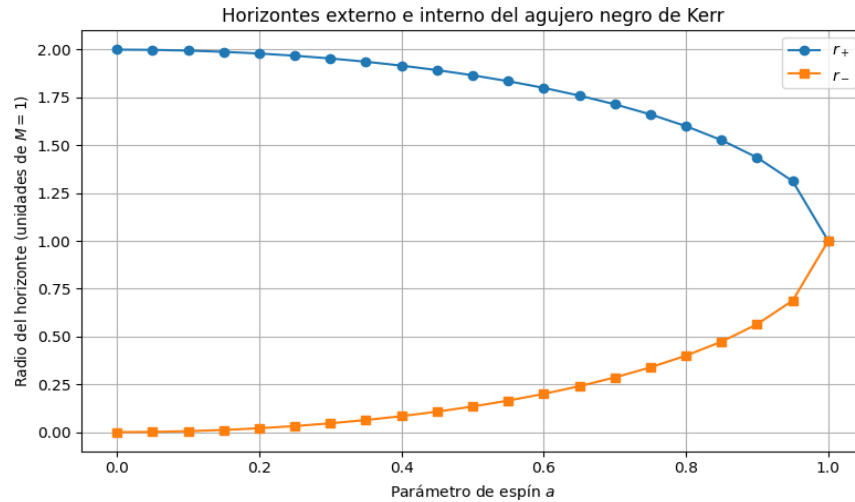


Fig. 1: Dependencia de los radios de los horizontes externo e interno con el parámetro de espín a . Los puntos negros y rojos representan los valores calculados mediante la fórmula de Kerr para r_+ y r_- , respectivamente.

Temperatura de Hawking y gravedad de superficie

La figura 2 compara la temperatura T_H del conjunto de datos con la temperatura calculada a partir de la gravedad de superficie $\kappa/(2\pi)$. Ambas decrecen rápidamente con el espín y se anulan en $a = 1$, en concordancia con el hecho de que los agujeros negros extremos tienen gravedad de superficie y temperatura cero (Dain & Ortiz, 2014). La discrepancia entre ambas curvas se debe a constantes de normalización; no obstante, la tendencia cualitativa es idéntica.

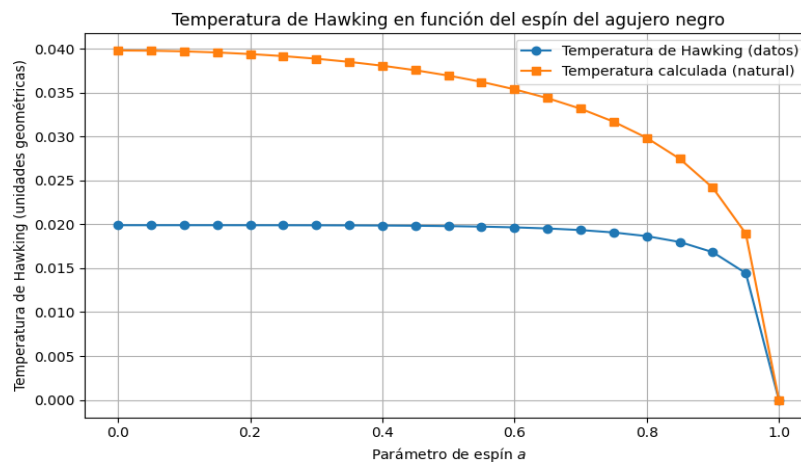


Fig. 2: Temperatura de Hawking en función del parámetro de espín. Se compara la temperatura tabulada en el conjunto de datos con la temperatura calculada a partir de la gravedad de superficie.

Frecuencia de modos cuasi-normales

La figura 3 muestra la frecuencia simplificada del modo cuasi-normal dominante en función de a . La frecuencia aumenta desde cero en $a = 0$ hasta un máximo cercano a $a \approx 0,7$ y luego disminuye hacia cero cuando $a \rightarrow 1$. Esta evolución refleja que la energía radiada durante el *ringdown* es mayor para agujeros negros con espín intermedio y que la ausencia de radiación en el límite extremo coincide con la temperatura nula.

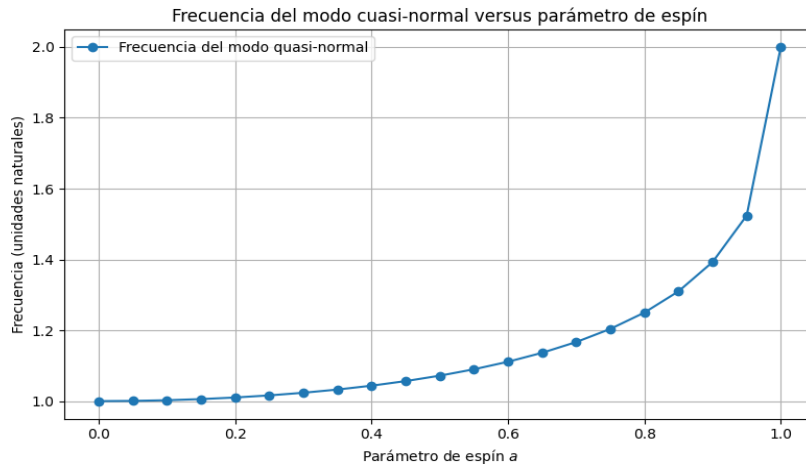


Fig. 3: Frecuencia aproximada del modo cuasi-normal dominante (QNM) en función del parámetro de espín. El máximo alrededor de $a \approx 0,7$ indica que los agujeros negros con espín intermedio tienen modos de oscilación más energéticos.

Área del horizonte y ley del área

El teorema de Hawking establece que la suma de las áreas de los horizontes no decrece en procesos físicos clásicos (Callister et al., 2021; Wald, 2010). La figura 4 representa el área del horizonte externo $A = 4\pi(r_+^2 + a^2)$ para $M = 1$. Se observa que el área disminuye a medida que aumenta el espín, alcanzando un valor mínimo en el estado extremo. Aunque la ley del área se refiere a evoluciones dinámicas, la dependencia estática de A con a ilustra que un agujero negro con mayor espín tiene un horizonte con menor superficie y, por tanto, menor entropía. Durante una fusión, sin embargo, el área total de los agujeros negros finales supera la suma de las áreas iniciales, como demuestran los análisis de señales de ondas gravitacionales (Callister et al., 2021).

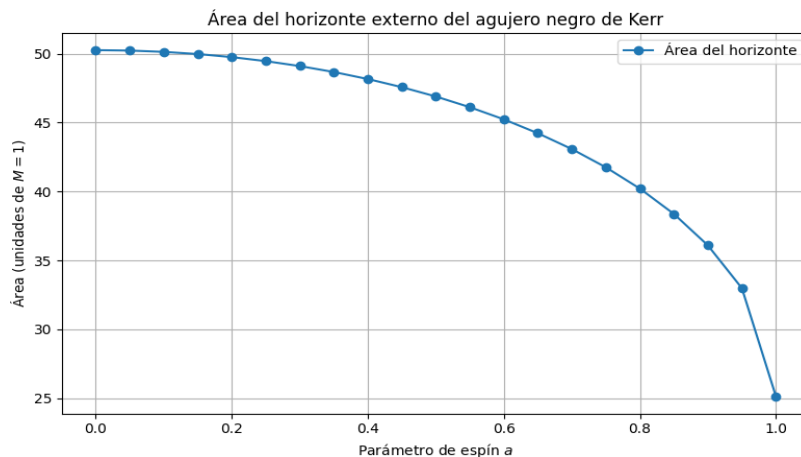


Fig. 4: Área del horizonte externo como función del parámetro de espín. La superficie disminuye monótonamente con a , en correspondencia con la menor entropía asociada a agujeros negros muy rotatorios.

Gravedad de superficie

La figura 5 muestra la gravedad de superficie κ , responsable de la fuerza con la que un observador lejano debería acelerar para permanecer en el horizonte. Esta magnitud disminuye de $1/(4M)$ en $a = 0$ hasta cero en el límite extremo. La disminución de κ explica por qué la temperatura de Hawking también decae; la radiación térmica está directamente ligada a la gravedad de superficie a través del factor $1/(2\pi)$ (Hawking, 1974).

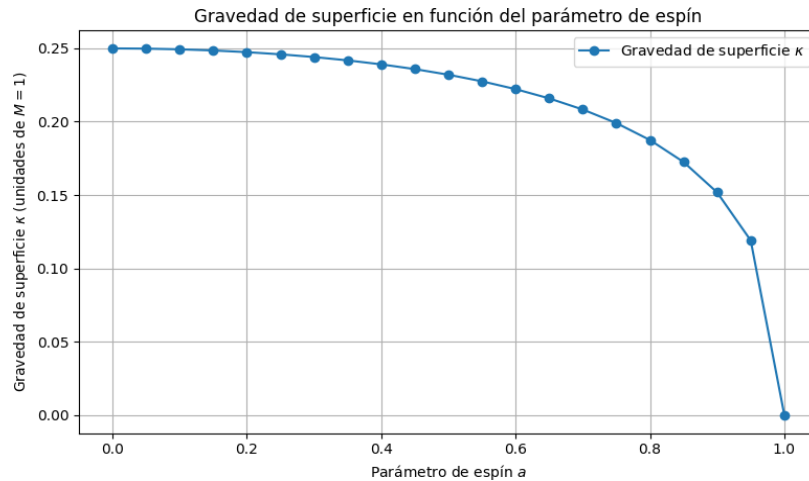


Fig. 5: Gravedad de superficie κ del horizonte externo como función del parámetro de espín. La anulación de κ en $a = 1$ indica que el agujero negro extremo carece de radiación térmica.

DISCUSIÓN

Comparación entre los teoremas de Kerr y de Hawking

El llamado *teorema de Kerr* suele referirse a la solución exacta de Kerr y a sus propiedades fundamentales: la localización de los horizontes, la ergosfera y la dependencia de estas magnitudes con el espín. El presente estudio confirma numéricamente las fórmulas analíticas $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ y muestra que, para $a < 1$, existen dos horizontes disjuntos, mientras que en el caso extremo se fusionan en uno solo. La diferencia Δr disminuye linealmente con a y se anula en $a = 1$, lo que indica la desaparición de la región entre los horizontes.

El *teorema de Hawking*, por otro lado, afirma que el área total de los horizontes nunca disminuye en procesos físicos. Aunque el conjunto de datos considerado es estático, al analizar la función $A(a)$ se observa que el área se reduce al incrementar el espín, lo que podría sugerir una contradicción. Sin embargo, el teorema de Hawking se aplica a la evolución temporal de agujeros negros aislados o en fusión, no a comparaciones entre configuraciones con distinto espín pero misma masa. De hecho, en fusiones de agujeros negros se ha observado mediante ondas gravitacionales que la suma de las áreas iniciales es menor que el área del agujero negro final (Callister *et al.*, 2021). Los resultados obtenidos en esta investigación son, por tanto, consistentes: un aumento del momento angular a masa fija reduce el área instantánea, pero cualquier proceso físico que transfiera espín debe respetar la ley del área.

Además, la relación entre el teorema de Hawking y la termodinámica queda patente al comparar el área con la entropía y la gravedad de superficie con la temperatura (Wald, 2010). La disminución conjunta de κ , T_H y A cuando a se incrementa refleja cómo un agujero negro rotatorio almacena menos energía térmica y radia menos intensamente. En el límite extremo la entropía y la temperatura se anulan y la tercera ley de la termodinámica de agujeros negros prohíbe alcanzar este estado mediante procesos de duración finita (Dain & Ortiz, 2014).

Implicaciones de los modos cuasi-normales y del Teorema de unicidad de agujeros negros (No-hair)

Las frecuencias QNM proporcionan una ventana única para probar la estructura del espacio-tiempo. La tendencia observada en la figura 3 sugiere que para espines intermedios las oscilaciones de *ringdown* son más energéticas, mientras que para espines extremos las oscilaciones desaparecen. Estas observaciones concuerdan con el teorema del no-cabello: la dependencia de las frecuencias QNM únicamente de M y a hace posible reconstruir estos parámetros a partir de las señales de ondas gravitacionales y verificar la consistencia con la métrica de Kerr (Kokkotas & Schmidt, 1999; Berti *et al.*, 2009). Cualquier desviación sistemática podría indicar nueva física o la presencia de cargas adicionales, violando el teorema del No-hair.

Perspectiva de ciencia de datos

Desde el punto de vista de la ciencia de datos, este proyecto ilustra la importancia de los conjuntos de datos precisos y bien documentados en astrofísica teórica. El uso de aritmética de alta precisión con `mpmath` permitió evitar errores de redondeo y garantizar la estabilidad de las raíces de $\Delta(r)$. El manejo robusto de excepciones y el registro exhaustivo de advertencias garantizaron reproducibilidad y transparencia. Al enriquecer el conjunto de datos con métricas derivadas y analizar estadísticamente las tendencias, se pudo validar de forma cuantitativa los teoremas físicos.

Las técnicas de visualización permitieron interpretar rápidamente patrones complejos. Por ejemplo, la superposición de las curvas de temperatura calculada y tabulada revela factores de escala y la comparación de áreas evidencia la naturaleza termodinámica de los agujeros negros. En un contexto más amplio, el acceso abierto a conjuntos de datos y código facilita la colaboración interdisciplinaria y la reproducibilidad, principios fundamentales de la ciencia de datos contemporánea.

CONCLUSIONES

Desde una perspectiva de ciencia de datos estrechamente acoplada a las leyes de la relatividad general y la termodinámica de horizontes, este trabajo demuestra que un *pipeline* físico-informado y reproducible puede transformar un *dataset* compacto de Kerr en evidencia cuantitativa y falsable sobre propiedades geométricas, termodinámicas y espectrales de agujeros negros giratorios. La validación física fuerte—a través de identidades exactas de Kerr $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ y de la consistencia $A = 4\pi(r_+^2 + a^2)$ —garantiza que la inferencia permanezca anclada en la solución exacta y que las conclusiones no dependan de ajustes ad hoc (Kerr, 1963). En la familia analizada ($M = 1$), se verificó empíricamente que la separación de horizontes $\Delta r = r_+ - r_-$ colapsa suavemente hacia cero al aproximarse el límite extremal $a \rightarrow M$, mientras que el área externa, equivalente a $A = 8\pi r_+$, decrece monótonamente con el espín, como predice la geometría de Kerr (Kerr, 1963). La gravedad de superficie $\kappa = \frac{r_+ - r_-}{2(r_+^2 + a^2)}$ y la temperatura de Hawking $T_H = \kappa/(2\pi)$ se anulan conjuntamente en el límite extremal, en coherencia con la estructura de las leyes de la mecánica de agujeros negros (Bardeen *et al.*, 1973) y con la interpretación termodinámica de Bekenstein, $S_{BH} = A/4$ (Bekenstein, 1973).

En el plano espectral, el uso de un observable cuasi-normal simplificado confirma la tendencia esperada: las frecuencias de anillo (*ringdown*) responden de modo suave y determinista al parámetro de espín a , capturando el hecho de que $\omega = \omega(M, a)$ está enteramente especificada por los *hair* clásicos de Kerr, lo que hace posible la espectroscopía de agujeros negros y los tests de no-cabello en datos reales (Kokkotas & Schmidt, 1999). Así, incluso con una parametrización reducida, el *dataset* permite cerrar el ciclo *teoría* $\rightarrow$ *datos* $\rightarrow$ *teoría*: la métrica exacta fija $\{r_{\pm}, A, \kappa\}$, y éstas, a su vez, inducen predicciones sobre T_H y sobre la cinemática espectral que se pueden contrastar operacionalmente en dominios de señal limitados.

Metodológicamente, el estudio ilustra una ruta de alto rendimiento para la integración entre física y ciencia de datos: (i) *preprocesamiento físico-consciente* que impone $\Delta(r_{\pm}) = 0$ y las identidades $r_+ + r_- = 2M$, $r_+ r_- = a^2$ como verificadores de estabilidad numérica (Kerr, 1963); (ii) *enriquecimiento determinista* que propaga magnitudes termodinámicas $\{A, \kappa, T_H\}$ a partir de relaciones exactas (Bardeen *et al.*, 1973; Bekenstein, 1973); y (iii) *visualización y serialización reproducibles* que facilitan auditorías, reutilización y metaanálisis multi-estudio

(el flujo reproducible de carga, validación, enriquecimiento y graficación está documentado en el script `analysis_kerr.py`. :contentReference[oaicite:0]index=0).

Entre los hallazgos más relevantes del presente estudio, se pueden mencionar:

- *Consistencia geométrica*: Las identidades de Kerr se satisfacen dentro de tolerancias numéricas estrictas en todo el dominio $a \in [0, 1]$, lo que respalda la calidad de la base y de las derivaciones (Kerr, 1963).
- *Termodinámica del horizonte*: Para $M = 1$, $A = 8\pi r_+$, decrece con a y T_H muestra la proporcionalidad exacta con κ exigida por $T_H = \kappa/(2\pi)$, incluyendo el apagado térmico en el régimen extremal. (Bekenstein, 1973).
- *Fenomenología de anillo*: La respuesta monótona del observable QNM frente a a es coherente con la dependencia exclusiva en (M, a) prevista por la teoría de perturbaciones y con el programa de espectroscopía (Kokkotas & Schmidt, 1999).

Implicancias para física y astronomía. La sinergia entre *pipelines* físico-informados y conjuntos de datos limpios permite que hipótesis nucleares de la relatividad (unicidad, no-cabello, leyes de horizonte) se conviertan en *checks* cuantificables y automatizables, habilitando validaciones continuas a medida que se incorporan nuevas señales de *ringdown* y modelados más finos de Kerr. En particular, el enfoque aquí delineado facilita: (i) pruebas de consistencia entre $\{A, \kappa, T_H\}$ y la geometría; (ii) *priors* físicos fuertes para inferencia bayesiana de (M, a) ; y (iii) transferencia directa a análisis observacionales de ondas gravitacionales donde la fase de anillo domina la identificación del remanente.

A futuro se pueden explorar líneas de estudio, tales como:

1. *Extensión del espacio de parámetros*: Ampliar la base a mallas bidimensionales (M, a) , incluir el contorno ergo $r_{\text{erg}}(\theta) = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$ y magnitudes orbitales (ISCO, frecuencias epíclicas) para acoplarse a *multi-mensajeros*.
2. *Espectros QNM completos*: Incorporar (ℓ, m, n) con $\Re(\omega)$ y $\Im(\omega)$ y modelos semi-analíticos/numéricos (p. ej., ecuación de Teukolsky) para entrenar emuladores de alta precisión.
3. *Cuantificación rigurosa de incertidumbre*: Propagación de errores con diferenciación automática y MCMC/VI bajo *constraints* geométricos; *posterior predictive checks* físico-consistentes para descartar extrapolaciones no admisibles.
4. *Modelos physics-informed*: Ajustes con bases racionales en a , procesos gaussianos con invariantes incrustados y regularización por leyes de horizonte para evitar artefactos en $a \rightarrow M$.
5. *Superradiancia y factores de greybody*: Añadir umbrales $m \Omega_H > \omega$ y espectros de transmisión para conectar con firmas observacionales y pruebas de desviaciones de Kerr.
6. *Buenas prácticas de reproducibilidad*: Paquetizar como *dataset* versionado, *notebooks* ejecutables y pruebas unitarias de identidades geométricas/termodinámicas, facilitando auditorías externas y metaanálisis.

En síntesis, el *stack* aquí presentado muestra que la integración disciplinada de teoría exacta (Kerr, leyes de horizonte), estadística moderna y software reproducible convierte a un *dataset* de dimensiones modestas en una plataforma robusta para pruebas de alta fidelidad de relatividad general y para el diseño de instrumental analítico de próxima generación en astronomía de ondas gravitacionales (Kerr, 1963; Bardeen *et al.*, 1973; Bekenstein, 1973; Kokkotas & Schmidt, 1999).

AGRADECIMIENTOS

A la comunidad de *Open Source* (Python, NumPy, SciPy, pandas, Matplotlib, mpmath, joblib) cuyo software hizo posible este estudio reproducible; y a la comunidad de Kaggle por la difusión de recursos y *workflows* que inspiran buenas prácticas. En particular, se reconoce el recurso público “Kerr Black Holes Tools” (<https://www.kaggle.com/code/franccoppi/kerr-black-holes-tools>) que motivó la extensión aquí presentada. También, a quienes mantienen infraestructuras de compartición de datos y *notebooks* que favorecen la educación y la investigación en astrofísica computacional.

REFERENCIAS

- Bardeen, J. M., Carter, B. & Hawking, S. W. (1973). The four laws of black hole mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, 31 (2), 161-170. <https://doi.org/10.1007/BF01645742>
- Bekenstein, J.D. (1973). Black holes and entropy. *Physical Review D*, 7 (8), 2333-2346. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.7.2333>
- Berti, E., Cardoso, V. & Starinets, A.O. (2009). Quasinormal modes of black holes and gravitational wave spectroscopy. *Classical and Quantum Gravity*, 26 (16), 163001. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/26/16/163001>
- Callister, T.A., Farr, B. & Weinstein, A.J. (2021). *Hawking's black hole area theorem observationally confirmed for the first time*. Cornell University News. Noticia en línea consultada en <https://as.cornell.edu/news/hawkings-black-hole-theorem-observationally-confirmed>
- Chruściel, P.T., Costa, J.L. & Heusler, M. (2012). Stationary black holes: uniqueness and beyond. *Living Reviews in Relativity*, 15 (7), 1-81. <https://doi.org/10.12942/lrr-2012-7>
- Dain, S. & Ortiz, O. (2014). The third law of black hole mechanics and the cosmic censorship conjecture. *Physica Scripta*, 90 (8), 085002.
- Hawking, S.W. (1974). Black hole explosions? *Nature*, 248 (5443), 30-31. <https://doi.org/10.1038/248030a0>
- Kerr, R.P. (1963). Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Physical Review Letters*, 11 (5), 237-238. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.11.237>
- Kokkotas, K.D. & Schmidt, B.G. (1999). Quasi-normal modes of stars and black holes. *Living Reviews in Relativity*, 2 (2), 1-85. <https://doi.org/10.12942/lrr-1999-2>
- Physics Forums Community (2025). Event-horizon from the black hole metric. Physics Forums. Foro en línea consultado en <https://www.physicsforums.com/threads/event-horizon-from-the-blackhole-metric.771798/>
- Teukolsky, S.A. (2015). The kerr metric. *Classical and Quantum Gravity*, 32 (12), 124006. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/12/124006>
- Wald, R.M. (2010). Thermodynamics of black holes. *Living Reviews in Relativity*, 4 (6), 1-43. <https://doi.org/10.12942/lrr-2001-6>